وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشهيد حمة الأخضر بالوادي
كلية التكنولوجيا
جذع مشترك علوم وتقنيات

مقياس: رياضيات 2

المحور الأول

التكاملات والدوال الأصلية

مسؤول المقياس
فرحات محمد السعيد
ميلودي ماجدة

1) الدوال الأصلية :

1-1) تعريف : f و F دالتان عدديتان معرفتان على مجال I من $\mathbb{R}$

نُسمّي دالة أصلية للدالة f على I، كل دالة تقبل الدالة f مشتقةً لها على المجال I

(F دالة أصلية للدالة f على المجال I) $\Leftrightarrow$ (الدالة F قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$)

أمثلة :

1) $F(x) = x^2$ دالة أصلية للدالة $f(x) = 2x$ على $\mathbb{R}$ لأنّ : $(x^2)' = 2x$

2) $F(x) = \ln x$ دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$ لأنّ : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3) $F(x) = \sqrt{x}$ دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $]0,+\infty[$ لأنّ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $F(x) = \arctan x$ دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ على $\mathbb{R}$ لأنّ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

2-1) نظريات :

- إذا كانت f مستمرة على مجال I فهي تقبل دالة أصلية F على I
- إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I، فإنه توجد ما لانهاية من الدوال الأصلية للدالة f وهي من الشكل:

$G(x) = F(x) + c$ حيث c ثابت من $\mathbb{R}$.

مثال : لتكن f و F دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = 8x^3 + 15x^2$ $\qquad$ $F(x) = ax^4 + bx^3$

1) عين a و b حتى تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) استنتج كل الدوال الأصلية G للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) عين الدالة الأصلية G للدالة f التي تحقق: $G(1) = 2021$

الحل : 1) F أصلية f $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow 4ax^3 + 3bx^2 = 8x^3 + 15x^2$

بالمطابقة نجد : $a = 2$ ، $b = 5$ ومنه $F(x) = 2x^4 + 5x^3$

2) كل الدوال الأصلية لـ f هي من الشكل $G(x) = 2x^4 + 5x^3 + c$ حيث c عدد كيفي من $\mathbb{R}$

3) $G(1) = 2021$ أي : $7 + c = 2021$ ومنه : $c = 2014$ ومنه $G(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2014$

جدول الدوال الأصلية:

الدالة	الدالة الأصلية	الدالة	الدالة الأصلية
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$f^n \times f' \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1} + C.$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C.$	$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$	$-\frac{f'}{f^2}$	$\frac{1}{f} + C.$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C.$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f} + C.$
e^x	$e^x + C.$	$f' e^f$	$e^f + C$
$\sin x$	$-\cos x + C.$	$f' \sin f$	$-\cos f + C.$
$\cos x$	$\sin x + C.$	$f' \cos f$	$\sin f + C.$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$tg\, x + C.$	$\frac{f'}{\cos^2 f}$	$tg\, f + C$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + cotg^2 x$	$-cotg\, x + C.$	$\frac{f'}{\sin^2 f}$	$-cotg\, f + C.$
$sh\, x$	$ch\, x + C.$	$f'\, sh\, f$	$ch\, f + C.$
$ch\, x$	$sh\, x + C.$	$f'\, ch\, f$	$sh\, f + C.$
$\frac{1}{x-\alpha}$	$\ln\lvert x - \alpha\rvert + C.$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$
$\frac{1}{(x-\alpha)^n} \; ; \; n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} + C.$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C.$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x + C.$	$\frac{1}{\sqrt{h+x^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{h+x^2}\right\rvert + C.$

2) التكامل غير المحدد:

2-1: تعريف: إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I من $\mathbb{R}$ فإن التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ و يرمز له بالرمز: $\int f(x)dx$ يُعرَّف بالعلاقة:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$ (حيث C عدد ثابت كيفي)

ونقرأ: تكامل $f(x)$ بدلالة x يساوي $F(x)+C$.

2-2: خواص:

1) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$

2) $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$

4) $\int F'(x)dx = F(x)+C.$

مثال:

- $\int 5x + 3\cos x\,dx = 5\frac{x^2}{2} + 3\sin x + C.$
- $\int 4\,\mathrm{sh}\,x + \frac{2}{1+x^2}dx = 4\,\mathrm{ch}\,x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C.$

2-3: طرق حساب التكامل:

1- التكامل بتغيير المتغير:

ليكن المطلوب حساب التكامل $I = \int f(x)dx$ ولم يكن بالإمكان حسابه مباشرة، لذا نضع متغيرا جديدا: $t = g(x)$ و تكون بذلك: $x = \varphi(t)$

حيث: φ قابلة للاشتقاق ومستمرة، عندئذ: $dx = \varphi'(t)dt.$ وبالتالي:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

مثال: احسب التكامل: $I = \int \cos^3 x \sin x\,dx.$

الحل: نضع: $t = \cos x$ فيكون: $dt = -\sin x\,dx.$ أي $dx = -\frac{dt}{\sin x}$

وبالتعويض في التكامل نجد:

$$I = \int t^3 \cdot \sin x \cdot \frac{-dt}{\sin x} = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C.$$

أخيرا: $I = \int \cos^3 x \sin x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4(x) + C$

مثال : أحسب التكامل : $I=\int \frac{dx}{x\ln x}$

الحل : نضع : $t=\ln x$ ومنه : $dt=\frac{1}{x}dx$ أي : $dx=x\,dt$

وبالتعويض : $I=\int \frac{x\,dt}{x\,t}=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+c=\ln|\ln x|+c$.

مثال : أحسب التكامل : $I=\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

الحل : نضع : $t=x^3+2$ ومنه : $dt=(3x^2)dx$. وبالتعويض نجد :

$$I=\int \frac{1}{3}\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-1/4}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot t^{3/4}+c=\frac{4}{9}t^{3/4}+c.$$

إذن : $I=\frac{4}{9}\left(x^3+2\right)^{3/4}+c$

ب - التكامل بالتجزئة :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I فإن :

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

تسمى هذه العلاقة بدستور المكاملة بالتجزئة .

مثال : أحسب التكامل : $I=\int x^2\ln x\,dx.$

$$\begin{cases} f(x)=\ln x \\ g'(x)=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=1/x \\ g(x)=\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

ومنه : $I=\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx.$

$$I=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3+c.$$

$$I=\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{9}x^3+c.$$

مثال : لنحسب التكامل التالي : $I=\int \operatorname{arctg}x\,dx.$

$$\begin{cases} u=\operatorname{arctg}x \\ V'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=1\setminus(1+x^2) \\ V=x \end{cases}$$

ومنه : $I=x\operatorname{arctg}x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$

$$I=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

4.2 : تكامل الدوال الناطقة :

نفكك الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ إلى كسور جزئية و بالتالي يتحول التكامل $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ إلى مجموع عدد من التكاملات الأبسط و الأسهل في التعامل.

نتبع القواعد التالية في عملية التفكيك :

✓ إذا كانت درجة $p(x)$ أكبر أو تساوي درجة $q(x)$ ، نستخدم القسمة الإقليدية.

✓ إذا كانت درجة $p(x)$ أصغر تماما من درجة $q(x)$

- كل عامل خطي $(ax+b)$ للدالة $q(x)$ يقابله كسر جزئي : $\frac{\alpha}{ax+b}$ حيث α ثابت

- كل عامل خطي مكرر $(ax+b)^n$ للدالة $q(x)$ يقابله n كسر جزئي :

$$\frac{\alpha_1}{ax+b} + \frac{\alpha_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(ax+b)^n}$$ حيث α_i ثوابت.

- كل عامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل (ax^2+bx+c) للدالة $q(x)$ يقابله كسر جزئي من الشكل : $\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ حيث α و β ثابتان

- كل عامل مكرر من الدرجة الثانية $(\Delta<0)$ $(ax^2+bx+c)^n$ للدالة $q(x)$ يقابله n كسر جزئي :

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{ax^2+bx+c} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n x+\beta_n}{(ax^2+bx+c)}$$

حيث α_i و β_i ثوابت يُطلب إيجادها.

وفي هذه الحالات ، لإيجاد الثوابت نساوي $\frac{p(x)}{q(x)}$ بمجموع الكسور المقابلة له كما أشرنا، ثم نضرب المساواة في $q(x)$ ، لنحصل على مساواة جديدة التي من خلالها يمكن الحصول على الثوابت إمّا بالمطابقة أو بإعطاء قيمة مناسبة للمتغير x .

و فيما يلي سوف نعطي أمثلة توضيحية لعملية التفكيك قبل البدء في التكامل.

مثال 1 :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

بالضرب في $(x-1)(x-2)$ نجد : $1 = a(x-2) + b(x-1) \dots (*)$

بوضع $x=1$ في المعادلة $(*)$ نحصل على : $1 = -a$ أي $\boxed{a=-1}$

بوضع $x=2$ في المعادلة $(*)$ نحصل على : $\boxed{1=b}$

ومنه :
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

مثال 2 :

$$\frac{(2x+14)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-2)}$$
$$= \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

بضرب الطرفين في المقدار $(x+1)^2(x-2)$ نحصل على : $2x+14 = a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)^2$

بوضع $x=2$ في المساواة الأخيرة نجد : $18 = 9c$ أي $\boxed{c=2}$

بوضع $x=-1$ في المساواة الأخيرة نجد : $12 = -3b$ أي $\boxed{b=-4}$

بمطابقة معاملات x^2 نجد : $a+c=0$ أي $\boxed{a=-2}$

ومنه تفكيك الكسر المعطى يكون بالشكل :

$$\frac{(2x+14)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{-2}{(x+1)} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-2)}$$

مثال 3 :

$$\frac{6x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{a(x^2+2x+2) + \cancel{x}(x-1)(bx+c)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

بضرب الطرفين في المقام نجد : $6x-1 = a(x^2+2x+2) + (x-1)(bx+c)$

بوضع $x=1$ في المساواة الأخيرة نجد : $5 = 5a$ ومنه $\boxed{a=1}$

بمطابقة معاملات x^2 نجد : $a+b=0$ أي $b=-a$ ومنه $\boxed{b=-1}$

بوضع $x=0$ نجد : $-1 = 1(2) + (-1)(c)$ ومنه $\boxed{c=3}$

اذن :
$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+3}{x^2+2x+2}$$

مثال 4 : فكّك الكسور التالية إلى كسور جزئية .

$$f(x)=\frac{x}{2x^2+2x-4} \; ; \; g(x)=\frac{2x+4}{x^3-4x^2+4x} \; ; \; h(x)=\frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+6x+10)}$$

الحل :

1) نحلل المقام : $(2x^2+2x-4)$ لذا نحسب Δ ، $\Delta=b^2-4ac=36$ ومنه $x_1=1, x_2=-2$

ومنه التفكيك هو :
$$f(x)=\frac{x}{2(x-1)(x+2)}=\frac{a}{2(x-1)}+\frac{b}{(x+2)}$$

بنفس طريقة المثال (1) نجد : $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

2) نحلل المقام : (x^3-4x^2+4x) لدينا : $x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)$.

x^2-4x+4 من الدرجة الثانية مميزه Δ يساوي 0 ويقبل جذراً مضاعفاً هو $x_0=\frac{-b}{2a}=2$

تحليله هو : $x^2-4x+4=a(x-x_0)^2=(x-2)^2$

ومنه تحليل المقام هو : $x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2$.

وعليه تفكيك $g(x)$ يكون كالآتي :

$$g(x)=\frac{2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-2)}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

بنفس طريقة المثال (2) صفحة (6) نجد : $a=1, b=-1, c=4$

3) $(x^2+6x+10)$ من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=-4<0$ اذن لا يمكن تحليله .

ومنه تفكيك $h(x)$ هو :
$$g(x)=\frac{x^2+9}{(x+1)(x^2+6x+10)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+6x+10}$$

بنفس طريقة المثال (3) صفحة (6) نجد : $a=2, b=-1, c=-11$

$$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{(x+11)}{x^2+6x+10}$$

✓ بعد عملية التفكيك ، نتطرق إلى مكاملة الكسور الجزئية التالية

① $\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx$ ② $\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$ ③ $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx.$

تكامل الكسور الجزئية:

① $I=\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx$: هناك حالتان

$n=1 \to I=\ln|x-\alpha|+c.$

$n\neq 1 \to I=\frac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}+c$

② $I_n=\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt.$: هناك ثلاث حالات.

✓ $n=1$: $I=\operatorname{arctg} t+c$ ✓ $n=\frac{1}{2}$: $I=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c.$

✓ $n\neq 1$ و $n\neq \frac{1}{2}$ يمكن إيجاد علاقة تراجعية بين I_n و I_{n-1} أو استخدام تغيير المتغير التالي: $t=tgy$ ليصبح: $I_n=\int \cos^{2n-2}(y)dy$ الذي يمكن حسابه بتحويل $\cos^{2n-2}(y)$ إلى مجموع عبارات خطية.

③ $I_n=\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ } في حالة ax^2+bx+c غير قابل للتحليل أي $\Delta<0$).

المرحلة 1: تكتب البسط بدلالة مشتق (ax^2+bx+c) أي: $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{\alpha(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$

المرحلة 2: نستخدم الشكل النموذجي: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

المرحلة 3: نستخدم تغيير المتغير: $t=\sqrt{\frac{4a^2}{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$

لنحصل على: $I_n=\alpha\int\frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^n}+\gamma\int\frac{1}{(t^2+1)^n}dt.$

I_n هو إذن مجموع تكاملين، الأول من الشكل $\int\frac{u'}{u^n}$ والثاني دُرس في الحالة ②

مثال 1: عين $\int g(x)dx$ حيث $g(x)$ هي الدالة المعرفة في المثال 4 صفحة ⑦ $g(x)=\frac{2x+4}{x^3-4x^2+4x}$.

الحل: لقد قمنا من قبل بتفكيك $g(x)$ في: $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-2)}+\frac{4}{(x-2)^2}$

ومنه $I=\int g(x)dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x-2}dx+4\int\frac{1}{(x-2)^2}dx$

$=\ln|x|-\ln|x-2|+4\frac{-1}{(2-1)(x-2)^{2-1}}+c=\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{4}{x-2}+c.$

مثال 2: عين التكامل: $I = \int \frac{4x+5}{x^2+x+2}dx.$

الحل: المرحلة ①: نكتب البسط بدلالة مشتق المقام أي نبحث عن α و β بحيث: $f(x) = \frac{\alpha(2x+1)}{x^2+x+2} + \frac{\beta}{x^2+x+2}$

بالنشر للبسط نجد: $2\alpha x + \alpha + \beta$ ومطابقته بـ $(4x+5)$ نجد:

$$\begin{cases} 2\alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3. \end{cases}$$

ومنه: $I = 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx + 3\int \frac{1}{x^2+x+2}dx = 2\ln(x^2+x+2) + 3J + C.$

المرحلة ②: لإيجاد J نستخدم الشكل النموذجي، نحسب: $\Delta = b^2 - 4ac = -7.$

$$x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

المرحلة ③ نستخدم تغيير المتغير: $t = \sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. ومنه، $dt = \sqrt{\frac{4}{7}}\,dx.$

لنجد:

$$J = \int \frac{1}{x^2+x+2}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}\,dt}{\frac{7}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)^2+1\right]}$$

$$J = \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \sqrt{\frac{4}{7}}\operatorname{arctg} t = \sqrt{\frac{4}{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

أخيرا:

$$I = 2\ln(x^2+x+2) + 3\sqrt{\frac{4}{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

مثال 3: عين التكامل: $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

الحل: نبحث عن α و β بحيث:

$$x+3 = \alpha(2x+2) + \beta.$$
$$= 2\alpha x + 2\alpha + \beta.$$

بالمطابقة نجد: $2\alpha = 1$ و $2\alpha + \beta = 3$ وينتج: $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = 2$

ومنه: $I = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} + 2\int \frac{1\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \underbrace{\sqrt{x^2+2x+5}} + 2J + C$

تذكير: $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$

لايجاد J نستخدم الشكل النموذجي، $\Delta = -16$ ونتج $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}}$$

نضع: $t = \frac{x+1}{2}$ فينتج: $dt = \frac{1}{2}dx$ ومنه:

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{2\,dt}{2\sqrt{t^2+1}} = 1\left[\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]$$

$$J = 1\ln\left|\left(\frac{x+1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right|$$

نعوض J بِمَا يساويها فنتحصل على I.

مثال 4: ليكن التكاملان: $J = \int \frac{1}{(x^2-4x+13)^2}dx$ ، $I = \int \frac{x}{(x^2-4x+13)^2}dx$

1) تحقق أنه $\cos^2 y = \frac{1}{2}(1+\cos 2y)$ ثم عين $\int \cos^2 y\, dy$

2) مستخدما تغيير متغير مناسب استنتج J

3) عين التكامل I

الحل: 1) لدينا: $1 = \cos^2 y + \sin^2 y$ و $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ بالتعويض نجد المطلوب

$$\int \cos^2 y\, dy = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2y\, dy = \frac{1}{2}\left[y+\frac{1}{2}\sin 2y\right] = \frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y$$

2) نستخدم الشكل النموذجي: $\Delta = -36$ وينتج: $x^2-4x+13 = (x-2)^2+9.$

$$\frac{1}{(x^2-4x+13)^2} = \frac{1}{\left[(x-2)^2+9\right]^2} = \frac{1}{\left(9\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]\right)^2} = \frac{1}{81}\,\frac{1}{\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right]^2}$$

نضع: $t = \frac{x-2}{3}$ فينتج $dt = \frac{1}{3}dx$ ومنه $J = \int \frac{1}{81}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^2}\cdot 3\,dt$

$J = \frac{1}{27}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt.$ نضع $t = tg\, y$ فينتج: $dt = \frac{1}{\cos^2 y}dy$

$$(t^2+1)^2=(tg^2+1)^2=\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^2=\frac{1}{\cos^4 y}\Rightarrow J=\int\frac{1}{27}\cdot\frac{\cos^4 y}{\cos^2 y}\,dy=\frac{1}{27}\int\cos^2 y\,dy$$

من السؤال (1) نستنتج أن :

$$J=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sin 2y\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arctg} t)\right]=\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{108}\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right)$$

3) $$I=\int\frac{x}{(x^2-4x+13)^2}\,dx.$$

نبحث عن α و β بحيث : $x=\alpha(2x-4)+\beta=2\alpha x-4\alpha+\beta$

بالمطابقة نجد : $2\alpha=1$ و $-4\alpha+\beta=0$ وينتج : $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=2$.

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-4)}{(x^2-4x+13)^2}\,dx+2\int\frac{1\,dx}{(x^2-4x+13)^2}=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{-1}{x^2-4x+13}\right)}+2J$$

تذكير : $\longleftarrow$ $\int\frac{U'}{U^2}=-\frac{1}{U}$

بعد تعويض J بما يساويها نجد التكامل I.

2.5 : تكاملات تؤول حسابها إلى حساب تكامل كسري :

لتكن R دالة ناطقة.

(1) التكامل من الشكل : $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$

في هذه الحالة نستخدم تغيير المتغير : $t=tg\left(\frac{x}{2}\right)$ فينتج :

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ;\ tg x=\frac{2t}{1-t^2}\ ;\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

مثال : لحساب التكامل $I=\int\frac{1}{\sin x}\,dx.$ نضع $t=tg\frac{x}{2}$ فينتج

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$ لنجد :

$$I=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{(1+t^2)}\,dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c$$

ملاحظة :

- في التكاملات من الشكل : $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ نضع : $t=\cos x$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ نضع : $t=\sin x$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(tg x)\,dx$ نضع : $t=tg x$

② التكامل من الشكل : $\int R(shx, chx, e^x)\,dx$

في هذه الحالة نضع $t=e^x$ أي $x=\ln|t|$ فينتج : $shx=\frac{t^2-1}{2t}$; $chx=\frac{t^2+1}{2t}$; $dx=\frac{dt}{t}$

مثال: لحساب التكامل $I=\int \frac{1}{chx}\,dx$ نضع : $t=e^x$

فينتج : $I=\int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctg t + c = 2\arctg(e^x)+c.$

ملاحظة :

- في التكاملات من الشكل : $\int R(chx)\,shx\,dx$ نضع : $t=chx$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(shx)\,chx\,dx$ نضع : $t=shx$
- في التكاملات من الشكل : $\int R(thx)\,dx$ نضع : $t=thx.$

③ التكامل من الشكل : $\int R(x, x^{p_1/q_1}, x^{p_2/q_2}, \dots)\,dx$ حيث $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ كسور غير قابلة للاختزال

في هذه الحالة نضع : $x=t^n$ حيث : $n=ppcm(q_1, q_2, \dots)$

مثال : لنحسب التكامل : $I=\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$ ، نضع : $x=t^6$

$dx=6t^5dt$ فيصبح : $I=\int \frac{6t^5dt}{t^4-t^3} = 6\int \frac{t^2}{t-1}\,dt.$

باستخدام القسمة الاقليدية نجد : $\frac{t^2}{t-1} = t+1+\frac{1}{t-1}$

ومنه $I=6\int t+1+\frac{1}{t-1}\,dt = 6\left[\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right]+c.$

لدينا : $x=t^6$ أي $t=\sqrt[6]{x}$ ومنه $I=3\sqrt[3]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

④ التكامل من الشكل : $\int R(x, y, y^{p_1/q_1}, y^{p_2/q_2}, \dots)\,dx$ حيث $\frac{p_i}{q_i}$ كسور غير قابلة للاختزال

و $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، في هذه الحالة نضع : $t=y^{\frac{1}{n}}$ أي $y=\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$

n يمثل المضاعف المشترك الأصغر للأعداد $q_1, q_2, \dots$

مثال 1: عين التكامل التالي : $I = \int \frac{1}{\sqrt{4x+1} - \sqrt[4]{(4x+1)^3}}\, dx$

نضع : $t = (4x+1)^{1/4}$ أي $4x+1 = t^4$ لنتحصل على : $x = \frac{t^4 - 1}{4}$ ومنه $dx = t^3 dt$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} - \sqrt[4]{t^{12}}} \cdot t^3 dt = \int \frac{t^3}{t^2 - t^3} dt = \int \frac{t}{1-t} dt.$$

بالقسمة الإقليدية نجد : $\frac{t}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}$

$$I = \int -1 + \frac{1}{1-t} dt = -t - \int \frac{-1}{1-t} dt = -t - \ln|1-t| + c.$$

بعد التعويض نجد : $I = -(4x+1)^{\frac{1}{4}} - \ln\left|1 - (4x+1)^{1/4}\right| + c.$

الفصل الرابع:

المعادلات التفاضلية

Les équations différentielles

1-4 المعادلات التفاضلية العادية

تعريف1

نسمي **معادلة تفاضلية عادية** équation différentielle ordinaire كل علاقة بين المتغير x و التابع المجهول $y=f(x)$ و مشتقاته y' ، y'' ،...، $y^{(n)}$. و نكتب :

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \quad \text{أو} \quad F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

مثال

$F=m\dfrac{dV}{dt}$.

تعريف2

نسمي **رتبة** ordre معادلة تفاضلية الرتبة العليا للمشتق الموجود فيها.

مثال

- المعادلة التفاضلية $y'+2y=0$ رتبتها 1.
- المعادلة التفاضلية $y'\left(1+y'^3\right)=5y''+\cos x$ رتبتها 2.

تعريف3

نسمي **حل** solution أو **تكامل intégrale** معادلة تفاضلية كل دالة $\varphi:I\to IR$ قابلة للاشتقاق n مرة تحققها أي:

$$F\left(x,\varphi,\varphi',\ldots,\varphi^{(n)}\right)=0$$

مثال

المعادلة التفاضلية $y'+\dfrac{y}{x}=0$ تقبل مجموعة حلول على الشكل $y=\dfrac{Cte}{x}$ حيث Cte ثابت حقيقي كيفي. منحنياتها متوازية.

لنبحث عن الحل الذي يمر من النقطة $(2,1)$ و هو بالتعويض $y=\dfrac{2}{x}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملاحظة

- دون فرض أي شروط ابتدائية نسمي **الحل العام** solution générale مجموعة حلول المعادلة التفاضلية و هو يحتوي على ثوابت كيفية.
- نسمي الحل الذي يمر من (x_0,y_0) **حل خاص** solution particulière للمعادلة التفاضلية وهو يوافق قيم محددة للثوابت.

2-4 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

هي على الشكل العام:

$$y'=f(x,y) \quad \text{أو} \quad F(x,y,y')=0$$

1-2-4 المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة

هي على الشكل العام:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

نحصل على حلها العام مباشرة بالتكامل:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=0$$

مثال

لتكن $xdx+ydy=0$ حلها العام $\int xdx+\int ydy=0$ أي $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C$ ومنه $x^2+y^2=C_0$ وهي معادلة مجموعة دوائر مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها C_0.

2-2-4 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

هي على الشكل العام:

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

في حالة $M_2(x)N_1(y)\neq 0$ نستطيع تحويلها إلى معادلة ذات متغيرات منفصلة وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $M_2(x)N_1(y)$ فنجد:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$$

وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة.

مثال

لتكن $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$. لنفصل المتغيرات وذلك بالقسمة على xy نجد

rekkabsoraya@yahoo.fr

$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$ أي $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0$

بالمكاملة نحصل على $\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$ أو $\ln|xy|+x-y=C$

وهو الحل العام للمعادلة المقترحة.

3-2-4 المعادلات التفاضلية المتجانسة

نقول أن المعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$ **متجانسة** homogène إذا كان

$$\forall\lambda\in IR:\ f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$$

بأخذ $\lambda=\frac{1}{x}$ حيث $x\neq 0$ فإن العلاقة السابقة تصبح على الشكل:

$$\boxed{f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

نلاحظ أن التابع f لا يتعلق مباشرة بالمتغيرين x و y وإنما يتعلق بالنسبة بينهما أي $\frac{y}{x}$.

طريقة الحل:

نضع $u=\frac{y}{x}$ ومنه $y=ux$ وبالتالي $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$y'=f(1,u)=\frac{du}{dx}x+u$ أي $(f(1,u)-u)dx-xdu=0$ وهي معادلة تفاضلية قابلة للفصل.

مثال

لتكن $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

نضع $u=\frac{y}{x}$ ومنه $y=ux$ وبالتالي $y'=\frac{du}{dx}x+u$.

بالتعويض في المعادلة المقترحة نجد $e^{u}+u=\frac{du}{dx}x+u$ أي $e^{u}dx-xdu=0$

وهي معادلة قابلة للفصل إذن نفصل المتغيرات فتصبح

$$\frac{dx}{x}-e^{-u}du=0$$

وهي معادلة منفصلة نحلها بالمكاملة نجد

$$\int\frac{dx}{x}-\int e^{-u}du=0$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

ومنه $\ln|x|+e^{-u}=C$

وبتعويض $u=\frac{y}{x}$ نجد الحل العام للمعادلة المقترحة هو $y=-x\ln\left(C-\ln|x|\right)$.

4-2-4 المعادلة الخطية من الرتبة الأولى

هي على الشكل العام:

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

حيث P و Q هما دالتان (أو ثابتان) مستمرتان على مجال I معطاتان.

إذا كان: $\forall x\in I, Q(x)=0$ ، عندئذ نسمي المعادلة:

$$y'+P(x)y=0$$

معادلة دون طرف ثاني أو متجانسة.

طريقة الحل:

تعتمد على النظرية التالية

نظرية

كل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يمكن كتابة حلها العام على الشكل:

$$y_G=y_H+y_P$$

حيث y_H هو الحل العام للمعادلة دون طرف ثاني. و y_P هو حل خاص للمعادلة بطرف ثاني.

كيفية إيجاد y_H :

يكفي حل المعادلة دون طرف ثاني: $y'+P(x)y=0$ أي

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}+P(x)dx=0$$

بالمكاملة نجد:

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C$$

$$\Rightarrow y_H=ke^{-\int P(x)dx} / \text{ ثابت حقيقي } k$$

كيفية إيجاد y_P :

نجعل الثابت k الذي يظهر في عبارة y_H دالة للمتغير x أي

نضع $k=k(x)$ ونفرض أن $y_P=k(x)e^{-\int P(x)dx}$ حلا خاصا للمعادلة بطرف ثاني.

لتعيين $k(x)$ نشتق عبارة y_P ونعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$k(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

ومنه

$$y_P=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

مثال

لتكن $y'-\frac{y}{x}=x$ حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$.

تعيين y_H : الحل العام للمعادلة دون طرف ثاني $y'-\frac{y}{x}=0$. لدينا

$$y'-\frac{y}{x}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0\Rightarrow\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0\Rightarrow\ln|y|-\ln|x|=C$$

$$\Rightarrow y_H=kx\,/\,k\text{ ثابت حقيقي}$$

تعيين y_P : نضع $k=k(x)$ ونفرض $y_P=k(x)x$ حلا خاصا لـ $y'-\frac{y}{x}=x$ ومنه لتعيين $k(x)$

نشتق $y'_P=k'(x)x+k(x)$ ثم نعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد $k'(x)x+k(x)-\frac{k(x)x}{x}=x$

ومنه $k'(x)=1$ إذن $k(x)=x$ وبالتالي $y_P=x^2$.

ومنه $y_G=kx+x^2$ حيث k ثابت حقيقي.

5-2-4 معادلة برنولي

هي على الشكل العام:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n$$

حيث P و Q هما دالتان مستمرتان على مجال I (أو ثابتان) معطاتان و $n>1$.

طريقة الحل:

نحولها إلى معادلة تفاضلية خطية وذلك بقسمة الطرفين على y^n فتصبح على الشكل

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x)$$

نضع $z=y^{-n+1}$ ومنه $\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

بالتعويض ثم ضرب الطرفين في $(-n+1)$ نجد

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية نبحث عن حلها العام كما جاء في الفقرة السابقة ثم نعوض بـ $z=y^{-n+1}$.

مثال

لتكن: $y'+xy=x^3y^3$.

لحلها نقسم الطرفين على y^3 فتصبح $y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3$ نضع $z=y^{-2}$ ومنه $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

وبالتعويض نجد $\frac{1}{-2}\frac{dz}{dx}+xz=x^3$ أي $\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$ وهي معادلة خطية بطرف ثاني حلها العام على الشكل $z_G=z_H+z_P$.

تعيين z_H: الحل العام للمعادلة دون طرف ثاني $\frac{dz}{dx}-2xz=0$. لدينا

$$\frac{dz}{dx}-2xz=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=2xdx\Rightarrow\ln|z|=x^2+C\Rightarrow z_H=ke^{x^2}$$ / kثابت حقيقي

تعيين z_P: نضع $k=k(x)$ ونفرض $z_P=k(x)e^{x^2}$ حلا خاصا للمعادلة بطرف ثاني إذن لإيجاد $k(x)$ نشتق $z'_P=k'(x)e^{x^2}+2xk(x)e^{x^2}$ وبالتعويض في المعادلة بطرف ثاني نجد $k'(x)e^{x^2}=-2x^3$ أي $k(x)=\int-2x^3e^{-x^2}dx$ لحسابها نستعمل التكامل بالتجزئة حيث نضع

$$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$$

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}\Rightarrow g(x)=e^{-x^2}$$

$$k(x)=x^2e^{-x^2}+\int-2xe^{-x^2}dx=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}$$

ومنه $z_P=x^2+1$ و بالتالي $z_G=x^2+1+ke^{x^2}$ حيث kثابت حقيقي.

بالتعويض بـ $z=y^{-2}$ نجد الحل العام للمعادلة المقترحة بالشكل

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+ke^{x^2}}}$$

3-4 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

وهي على الشكل العام:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$ay''+by'+cy=Q(x)$$

حيث a، b و c ثوابت حقيقية و $a \neq 0$، Q دالة مستمرة على مجال I أو ثابتة (معطاة).

إذا كان الطرف الثاني $Q(x)=0$ نسمي المعادلة:

$$ay''+by'+cy=0$$

معادلة متجانسة équation homogène أو **دون طرف ثاني** sans second membre.

طريقة الحل:

تعتمد على النظرية التالية.

نظرية

الحل العام y_G للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بطرف ثاني هو مجموع حل خاص كيفي y_P لهذه المعادلة و الحل العام y_H للمعادلة المتجانسة المرافقة لها $ay''+by'+cy=0$. أي

$$y_G = y_H + y_P$$

كيفية إيجاد y_H : الحل العام لـ $ay''+by'+cy=0$.

نعتمد على النظرية التالية.

نظرية

إذا كان y_1 و y_2 حلين خاصين للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $ay''+by'+cy=0$ وهما مستقلين خطيا (أي $\frac{y_1}{y_2} \neq Cte$) فإن حلها العام هو من الشكل:

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- **لنبحث عن حلين خاصين** y_1 **و** y_2 **:** من الشكل $y=e^{kx}$ حيث k ثابت حقيقي لتعيين قيمته يكفي اشتقاق y مرتين ثم التعويض في المعادلة المتجانسة. أي

$y'=ke^{kx}$ و $y''=k^2e^{kx}$ وبالتعويض في المعادلة دون طرف ثاني أو المتجانسة نجد:

$$\left(ak^2+bk+c\right)e^{kx}=0$$

بما أن $e^{kx} \neq 0$ فإن $ak^2+bk+c=0$.

نسمي المعادلة $ak^2+bk+c=0$ معادلة مميزة مرافقة للمعادلة التفاضلية المتجانسة. حلولها حسب المميز $\Delta = b^2-4ac$. نميز ثلاث حالات

- إذا كان $\Delta > 0$: فإن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$k_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ومنه فإن

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

حلان خاصان للمعادلة المتجانسة وهما مستقلان خطيا. فعلا، $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq Cte$ لأن $k_1 \neq k_2$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- إذا كان $\Delta = 0$: فإن المعادلة المميزة تقبل حلا حقيقيا مضاعفا

$$k = \frac{-b}{2a}$$

ومنه فإن

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{و} \quad y_2 = xe^{kx}$$

حلان خاصان للمعادلة المتجانسة وهما مستقلان خطيا. فعلا، $\frac{y_2}{y_1} = x \neq Cte$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- إذا كان $\Delta < 0$: فإن المعادلة المميزة تقبل حلين مركبين مترافقين: $k_1 = \alpha + i\beta$ و $k_2 = \alpha - i\beta$. حيث

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

و منه فإن

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{و} \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

حلان خاصان للمعادلة المتجانسة وهما مستقلان خطيا. فعلا، $\frac{y_2}{y_1} = \tan\beta x \neq Cte$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$y_H = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

كيفية إيجاد y_P : حل خاص لـ $ay''+by'+cy = Q(x)$. هناك طريقتان طريقة عامة وطريقة خاصة.

الطريقة العامة:

نجعل الثابتين الذين يظهران في عبارة y_H تابعين لـ x أي:

نضع $C_1 = C_1(x)$ و $C_2 = C_2(x)$.

ونفرض أن $y_P = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ هو حل خاص لـ $ay''+by'+cy = Q(x)$.

لتعيين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ يكفي أن نشتق y_P مرتين ثم نعوض في المعادلة بطرف ثاني و أخيرا نتحصل على:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \dfrac{Q(x)}{a} \end{cases}$$

وهي جملة خطية بمتغيرين نحلها بطريقة التعويض.

مثال

لتكن: $y''+4y'+3y = x$. حلها العام من الشكل: $y_G = y_H + y_P$

تعيين y_H : الحل العام لـ $y''+4y'+3y = 0$.

المعادلة المميزة المرافقة لها هي: $k^2+4k+3=0$ مميزها $\Delta = 4 > 0$ إذن تقبل جذرين $k_1 = -1$ و $k_2 = -3$ ومنه $y_H = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

تعيين y_P : نضع $C_1 = C_1(x)$ و $C_2 = C_2(x)$.

ونفرض أن $y_P = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-3x}$ هو حل خاص لـ $y''+4y'+3y = x$.

لتعيين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ يكفي أن نحل الجملة:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -C_1'(x)e^{-x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = x \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرفا لطرف نجد: $C'_2(x) = -\dfrac{x}{2}e^{3x}$ ثم بالتعويض في المعادلة (1) نجد $C_1'(x) = \dfrac{x}{2}e^{x}$. نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $C_2(x)$ حيث نضع

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$f(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$g'(x) = e^{3x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{6}\int e^{3x}dx = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right)e^{3x}$$

نستعمل التكامل بالتجزئة مرة ثانية لحساب $C_1(x)$ حيث نضع

$$f(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = e^{x} \Rightarrow g(x) = e^{x}$$

$$C_1(x) = \frac{x}{2}e^{x} - \frac{1}{2}\int e^{x}dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{x}$$

وبالتعويض في $y_P = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-3x}$ نجد $y_P = \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$ وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو $y_G = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

الطريقة الخاصة:

وهي تعتمد على شكل الطرف الثاني $Q(x)$.

- **إذا كان $Q(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$:**

حيث P_n كثير حدود من الدرجة n و λ ثابت حقيقي. نميز ثلاث حالات

الحالة الأولى: λ ليس جذرا للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P = \left(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n\right)e^{\lambda x}$$

الحالة الثانية: λ جذر بسيط للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P = x\left(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n\right)e^{\lambda x}$$

الحالة الثالثة: λ جذر مضاعف للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P = x^2\left(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n\right)e^{\lambda x}$$

ولتعيين الثوابت A_0 ، A_1 ، A_2 ،...، A_n نشتق عبارة y_P مرتين ونعوض في المعادلة بطرف ثاني ثم نطابق.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لتكن: $y''+4y'+3y=x$. حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$.

لقد تم حساب y_H في المثال السابق ووجدنا $y_H=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

تعيين y_P : باستعمال الطريقة الخاصة.

لدينا الطرف الثاني $Q(x)=x$ ويمكن وضعه على الشكل $Q(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ مع $n=1$ و $\lambda=0$.

نلاحظ أن $\lambda=0$ ليس جذرا للمعادلة المميزة ومنه نبحث عن حل خاص من الشكل $y_P=A_0+A_1x$.

لتعيين A_0 و A_1 نشتق y_P مرتين فنجد $y_P'=A_1$ و $y_P''=0$ ثم نعوض في المعادلة بطرف ثاني $y''+4y'+3y=x$ فنحصل على $4A_1+3A_0+3A_1x=x$ وبالمطابقة نجد $A_1=\frac{1}{3}$ و $A_0=-\frac{4}{9}$.

أي $y_P=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$.

وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو $y_G=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- **إذا كان** $Q(x)=P(x)e^{\mu x}\cos wx+R(x)e^{\mu x}\sin wx$ **:**

حيث P و R كثيرا حدود و μ و w ثوابت حقيقية. نميز حالتين.

الحالة الأولى: $(\mu+iw)$ ليس جذرا للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=R_1(x)e^{\mu x}\cos wx+R_2(x)e^{\mu x}\sin wx$$

الحالة الثانية: $(\mu+iw)$ جذر للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=x\left(R_1(x)e^{\mu x}\cos wx+R_2(x)e^{\mu x}\sin wx\right)$$

حيث R_1 و R_2 كثيرا حدود من الدرجة $\max(\deg P,\deg R)$ لتعيينهما نشتق عبارة y_P مرتين ونعوض في المعادلة بطرف ثاني ثم نطابق.

مثال

لتكن: $y''-2y'+y=3e^{2x}\cos x$. حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$.

تعيين y_H : الحل العام لـ $y''-2y'+y=0$.

المعادلة المميزة المرافقة لها هي: $k^2-2k+1=0$ مميزها $\Delta=0$ إذن تقبل جذر مضاعف $k=1$.

ومنه $y_H=C_1e^x+C_2xe^x$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تعيين y_P :

لدينا الطرف الثاني للمعادلة $Q(x)=3e^{2x}\cos x$ يمكن وضعه على الشكل العام $Q(x)=P(x)e^{\mu x}\cos wx+R(x)e^{\mu x}\sin wx$ مع $w=1$ و $\mu=2$ و $P(x)=3$ و $R(x)=0$.

نلاحظ أن $(\mu+iw=2+i)$ ليس جذرا للمعادلة المميزة وبما أن $\max(\deg P,\deg R)=0$ ، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=R_1e^{2x}\cos x+R_2e^{2x}\sin x$$

حيث R_1 و R_2 ثابتان لتعيينهما نشتق عبارة y_P مرتين نجد

$$y_P'=(2R_1+R_2)e^{2x}\cos x+(2R_2-R_1)e^{2x}\sin x$$

$$y_P''=(3R_1+4R_2)e^{2x}\cos x+(2R_2-4R_1)e^{2x}\sin x$$

ونعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد

$$2R_2e^{2x}\cos x+2R_1e^{2x}\sin x=3e^{2x}\cos x$$

ثم بالمطابقة نجد

$$\begin{cases}2R_2=3\\2R_1=0\end{cases}\Rightarrow R_2=\frac{3}{2}\wedge R_1=0$$

ومنه $y_P=\frac{3}{2}e^{2x}\sin x$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو

$$y_G=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}e^{2x}\sin x$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- إذا كان $Q(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$:

وإذا كان y_1 حلا خاصا للمعادلة: $ay''+by'+cy=f_1(x)$

وإذا كان y_2 حلا خاصا للمعادلة: $ay''+by'+cy=f_2(x)$

...

وإذا كان y_n حلا خاصا للمعادلة: $ay''+by'+cy=f_n(x)$

فإن المعادلة $ay''+by'+cy=Q(x)$ تقبل حلا خاصا من الشكل:

$$y_P=y_1+y_2+\ldots+y_n$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لتكن: $y''+y=e^{2x}+5xe^{-x}-3\sin x$.

حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$

تعيين y_H : الحل العام لـ $y''+y=0$.

المعادلة المميزة المرافقة لها هي: $k^2+1=0$ مميزها $\Delta=-4<0$ إذن تقبل جذرين مركبين جزؤهما الحقيقي $\alpha=0$ أما الجزء التخيلي $\beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=1$.

ومنه $y_H=C_1\cos x+C_2\sin x$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

تعيين y_P : نبحث عن حل خاص من الشكل $y_P=y_1+y_2+y_3$ حيث y_1، y_2 و y_3 حلول خاصة للمعادلات $y''+y=e^{2x}...(*)$، $y''+y=5xe^{-x}...(**)$ و $y''+y=-3\sin x...(***)$ على الترتيب.

البحث عن y_1:

يمكن وضع الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ على الشكل $Q_1(x)=P_n(x)e^{\lambda x}=e^{2x}$ مع $n=0$ و $\lambda=2$.

نلاحظ أن $\lambda=2$ ليس جذرا للمعادلة المميزة ومنه نبحث عن حل خاص لـ $(*)$ من الشكل $y_1=A_0e^{2x}$. لتعيين A_0 نشتق y_1 مرتين نجد $y_1'=2A_0e^{2x}$ و $y_1''=4A_0e^{2x}$ ثم بالتعويض في $(*)$ و المطابقة نجد $A_0=\frac{1}{5}$ إذن $y_1=\frac{1}{5}e^{2x}$.

البحث عن y_2:

يمكن وضع الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ على الشكل $Q_1(x)=P_n(x)e^{\lambda x}=5xe^{-x}$ مع $n=1$ و $\lambda=-1$.

نلاحظ أن $\lambda=-1$ ليس جذرا للمعادلة المميزة ومنه نبحث عن حل خاص لـ $(**)$ من الشكل $y_2=(A_0+A_1x)e^{-x}$. لتعيين A_0 و A_1 نشتق y_2 مرتين نجد $y_2'=(A_1-A_0-A_1x)e^{-x}$ و $y_2''=(A_0-2A_1+A_1x)e^{2x}$ ثم بالتعويض في $(*)$ و المطابقة نجد

$$\begin{cases}2A_0-2A_1=0\\ 2A_1=5\end{cases}\Rightarrow A_1=A_0=\frac{5}{2}$$

إذن $y_2=\frac{5}{2}(1+x)e^{-x}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

البحث عن y_3 :

يمكن وضع الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ على الشكل:

$$Q_1(x)=P(x)e^{\mu x}\cos wx+R(x)e^{\mu x}\sin wx=-3\sin x$$

مع $\mu=0$ و $w=1$ و $R(x)=-3$ و $P(x)=0$. لدينا $\max(\deg P,\deg R)=0$ ، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_3=x(R_1\cos x+R_2\sin x)$$

حيث R_1 و R_2 ثابتان لتعيينهما نشتق عبارة y_3 مرتين نجد

$$y_3'=(R_2-xR_1)\sin x+(R_1+xR_2)\cos x$$

$$y_3''=(2R_2-xR_1)\cos x+(-2R_1+xR_2)\sin x$$

ونعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد

$$2R_2\cos x-2R_1\sin x=-3\sin x$$

ثم بالمطابقة نجد : $R_1=\frac{3}{2}\wedge R_2=0$. ومنه $y_3=\frac{3}{2}x\cos x$. أي المعادلة المقترحة تقبل حلا خاصا

$$y_P=y_1+y_2+y_3=\frac{1}{5}e^{2x}+\frac{5}{2}(1+x)e^{-x}+\frac{3}{2}x\cos x$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو

$$y_G=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{5}e^{2x}+\frac{5}{2}(1+x)e^{-x}+\frac{3}{2}x\cos x$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

I - عموميات :

1- تعريف المصفوفة : ليكن $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، n و p من $\mathbb{N}^*$.
نسمي مصفوفة A ذات سلميات في $\mathbb{K}$ من النمط $(n \times p)$، الجدول التالي

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

- السلميات التي لها نفس الدليل الأول i تسمى السطر رقم i
- السلميات التي لها نفس الدليل الثاني j تسمى العمود رقم j
- نرمز لمجموعة المصفوفات من النمط $n \times p$ سلميات في $\mathbb{K}$ بالرمز $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3i & -2 \\ 4 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

A مصفوفة تنتمي إلى $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$

$$a_{12} = 3i \quad , \quad a_{21} = 4 \quad , \quad a_{23} = -10$$

2- المصفوفة المعدومة من النمط $n \times p$:

هي المصفوفة (f_{ij}) من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ حيث كل السلميات f_{ij} معدومة.
و نرمز لها بالرمز: $O_{n\times p}(\mathbb{K})$

3- تساوي مصفوفتين :

لتكن A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$، $A = (a_{ij})$، $B = (b_{ij})$

$$A = B \Leftrightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n,\ \forall\, 1 \leq j \leq p : a_{ij} = b_{ij}$$

4- منقول مصفوفة:

ليكن المصفوفة $A=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

منقول المصفوفة A هي المصفوفة التي يرمزلها بالرمز A^t والتي تنتمي إلى $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ الناتجة بتغيير أسطر A إلى أعمدة.

$$A=(a_{ij}) \Rightarrow A^t=(a_{ji}).$$

$1\leq i\leq n.$ $1\leq j\leq p$; $1\leq j\leq p.$ $1\leq i\leq n.$

5- أنواع المصفوفات:

• المصفوفة المربعة هي مصفوفة A من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ حيث: $n=p$

يُرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بالرمز: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A=(a_{ij}) \; : \; 1\leq i\leq n ; 1\leq j\leq n$$

• القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ هي السلميات a_{ii} حيث $1\leq i\leq n$

• المصفوفة المثلثية العلوية هي مصفوفة A مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث

$$\forall\; 1\leq i,j\leq n : (j<n \Rightarrow (a_{ij})=0)$$

• المصفوفة المثلثية السفلية هي مصفوفة A مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث،

$$\forall\; 1\leq i,j\leq n : (j>n \Rightarrow a_{ij}=0).$$

• المصفوفة القطرية هي مصفوفة A مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث،

$$\forall\; 1\leq i,j\leq n : (j\neq n \Rightarrow a_{ij}=0).$$

• المصفوفة الحيادية هي مصفوفة قطرية حيث كل عنصر a_{ii} من القطر الرئيسي تساوي 1 ويرمزلها بالرمز I_n .

أمثلة:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

مثلثية سفلية. مثلثية علوية مربعة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

حيادية قطرية

II - العمليات على المصفوفات:

1 - جمع المصفوفات:

A و B مصفوفتان من نفس المجموعة $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ ، $A=(a_{ij})$; $B=(b_{ij})$

مجموع المصفوفتين A و B هو المصفوفة C من نفس النمط: $(n\times p)$.

$$C = A+B = (c_{ij}) \; ; \; c_{ij} = a_{ij}+b_{ij} \; . \; \forall \; 1 \le i \le n, \; \forall \; 1 \le j \le p.$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} . \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2 - ضرب مصفوفة في سلمية:

لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ و α من $\mathbb{K}$. نعرف المصفوفة $\alpha . A$ بـ:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; -2A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -10 \end{pmatrix}$$

خواص: ليكن A ، B و C من $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ و α ، β من $\mathbb{K}$. لدينا الخواص التالية

- $A+B = B+A$.
- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $A + O_{n\times p} = A$.
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
- $1_{\mathbb{K}} \cdot A = A$

3 - الجداء المصفوفي:

ليكن المصفوفتان: $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$

ضرب المصفوفتين A و B هو المصفوفة C من $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$

حيث: $A \times B = C = (c_{ij})$ $\quad 1 \le i \le m$, $1 \le j \le p$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

مثال:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

الجداء $C = A\times B$ معرّف لأن: $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$C = (c_{ij})$ تنتمي الى المجموعة $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$c_{11} = 3(0) + 1(2) + 0(3) = 2.$$
$$c_{12} = 3(-2) + 1(4) + 0(1) = -2.$$
$$c_{21} = 2(0) + 5(2) + 4(3) = 22$$
$$c_{22} = 2(-2) + 5(4) + 4(1) = 20$$
$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 22 & 20 \end{pmatrix}$$

مثال:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عين $A \times B$ و $B \times A$.

الحل:
$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظات: من المثال السابق نلاحظ:

- الجداء المصفوفي ليس تبديليا: $A \times B \neq B \times A$
- قد يكون الجداء $A \times B = 0$ من غير أن يكون $A = 0$ أو $B = 0$

خواص الجداء المصفوفي:

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

  $(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$.
- $\alpha (A \times B) = (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B)$
- $A \times I_n = A \; , \; I_m \times A = A \quad ; \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

4- قوة مصفوفة:

ليكن A مصفوفة مربعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ و p عدد طبيعي.

نصطلح أن $A^0 = I_n$ ولدينا: $A^1 = A$ ، $A^2 = A \times A$

ونعرف: $A^p = A \times A \times \dots \times A$ (p مرة)

تطبيق: لتكن المصفوفة A التالية
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1- احسب A^2 ، A^3 ، A^4

2- استنتج A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

الحل :

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&0&7\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}\quad A^4=\begin{pmatrix}1&0&15\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}$$

مما سبق نستنتج أن

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&2^n-1\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$$

ويمكن أن نبرهن على صحتها بالتراجع .

ملاحظة : من أجل A , B من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

$$(A+B)^3\neq A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2\neq A^2-B^2$$

III - المحددات : Determinants

① **تعريف :** لتكن المصفوفة المربعة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

محدد المصفوفة A (التي نرمز له بالرمز $\det(A)$ أو $|A|$) هو السلمية من $\mathbb{K}$ المعرف كمايلي :

• اذا كان : $n=1$ فإن $A=(a_{11})$ $\det(A)=a_{11}$

• اذا كان : $n>1$ فإن :

$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}}\quad \cdots (*)$$

حيث Δ_{ij} هو المحدد للمصفوفة من $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ الناتجة عن A بنزع السطر i والعمود j

ملاحظة : يمكن حساب المحدد للمصفوفة A بتثبيت أي سطر نختاره وفق العلاقة $(*)$ ، ويمكن حسابه بتثبيت أي عمود نختاره .

مثال 1 : (حساب المحدد من أجل $n=2$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

لنستخدم العلاقة (*) ونثبت السطر الأول

$$\det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} = (-1)^{1+1} a_{11} \Delta_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \Delta_{12}.$$

$$= a_{11} \det(a_{22}) + (-1) a_{12} \det(a_{21})$$

$$\boxed{\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

مثال 2 : احسب محدد المصفوفة B حيث :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

لنستخدم العلاقة (*) ونثبت العمود الأول .

$$\det(B) = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2(3-4) + 1(0-2)$$

$$= 0 - 2(-1) + 1(-2) = 0$$

2- نتائج :

- إذا كانت المصفوفة مثلثية أو قطرية فإن محددها يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي
- إذا انعدم سطر أو عمود في المصفوفة المربعة فإن محددها معدوم .
- إذا تناسبت عناصر سطرين (أو عمودين) فإن المحدد معدوم .

أمثلة :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

A مثلثية علوية ومنه محددها : $\det A = 1(-3)(2) = -6$

B قطرية ومنه محددها : $\det B = 2(1)(-1) = -2$

السطر الأول لـ C معدوم ومنه : $\det C = 0$

العمود 1 والعمود 3 لـ D متناسبان : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

ومنه محدد المصفوفة D هو $\det D = 0$

3. خواص : A , B من $M_n(\mathbb{K})$ و λ من $\mathbb{K}$.

- $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.
- $\det(A^t) = \det A$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

4. قاعدة ساروس Sarros لحساب محدد مصفوفة من $M_3(\mathbb{K})$

لتكن المصفوفة المربعة A من $M_3(\mathbb{K})$. $A=(a_{ij})$.

تعتمد هذه القاعدة على إعادة ~~المحد~~ كتابة السطرين الأولين في الأسفل أو اعادة كتابة العمودين الأولين على يمين المصفوفة وحساب المحدد يكون كالآتي

$$\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}.$$

مثال : احسب بطريقتين محدد المصفوفة A حيث :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 1(3)(1) + 0(4)(0) + 2(2)(1) - 0(3)(1) - 0(2)(1) - 2(4)(1) = \boxed{-1}$
- $\det A = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 8 + 4 - 0 = \boxed{-1}$

IV - مقلوب مصفوفة مربعة :

① تعريف : لتكن المصفوفة A من $M_n(\mathbb{K})$. نقول أن A قابلة للقلب أو عكوسة إذا وجدت مصفوفة وحيدة B من $M_n(\mathbb{K})$ تحقق :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

نرمز لمقلوب المصفوفة A بالرمز A^{-1}.

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

نلاحظ أن: $A\times B=B\times A=I_2$ ومنه $A^{-1}=B$

ترميز: نرمز لمجموعة المصفوفات من $M_n(\mathbb{K})$ العكوسة بالرمز $GL_n(\mathbb{K})$

نظرية: (وجود مقلوب مصفوفة)

لتكن المصفوفة A من $M_n(\mathbb{K})$.

A قابلة للقلب اذا وفقط اذا كان $\det A\neq 0$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

A قابلة للقلب لأن $\det A=-2$ و $-2\neq 0$

بينما B ليس قابل للقلب لأن $\det B=0$

2 - تعيين مقلوب مصفوفة مربعة

لتكن المصفوفة A من $M_n(\mathbb{K})$ حيث $\det A\neq 0$

مقلوب المصفوفة A هو A^{-1} ويعين بهذا القانون:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot (C_{ij})$$

$$(C_{ij})=(adj(A))^t \quad ; adj(A)=(\delta_{ij}) \;;\; \delta_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

Δ_{ij} هو محدد للمصفوفة من الرتبة $(n-1)$ الناتجة عن A بحذف السطر i والعمود j

مثال 1: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مع $\det A \neq 0$

• لابد أولا من تعيين $adj(A) = (\delta_{ij})$

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = (1) \cdot d = d.$$

$$\delta_{12} = (-1)^{1+2} \Delta_{12} = (-1) \cdot c = -c.$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = (-1) \cdot b = -b.$$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{22} = (1) \cdot a = a.$$

$$\Rightarrow adj(A) = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (C_{ij}) = (adj(A))^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

أخيرا مقلوب A هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (C_{ij})$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

تطبيق عددي مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

مثال 2: لتكن المصفوفة A من $M_3(\mathbb{R})$ التالية،

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

عين مقلوب المصفوفة A

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0-8+6-0-(-4)-0 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(adj(A)\right)^t .$$

$$\delta_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1) = -1$$

$$\delta_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2 .$$

$$\Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(3) = 3 .$$

$$\delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2 .$$

$$C = \left(adj(A)\right)^t$$

$$\delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4 .$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(4) = -4 .$$

$$\delta_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4$$

أخيرا .

$$\delta_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-10) = 10 .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot C .$$

$$\delta_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(12) = 12 .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1{,}5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3 - خواص: لتكن A و B مصفوفتين من $M_n(\mathbb{R})$ ومن $GL_n(\mathbb{R})$

1/ $(A^{-1})^{-1} = A$.

2/ $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

3/ $\forall P \in \mathbb{N}: A^{-P} = (A^{-1})^{P} = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \cdots \times A^{-1}}_{P \text{ مرة}}$.

البرهان عن الخاصية 2:

لدينا:

$$(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = A \times (B \times B^{-1}) \times A^{-1}$$
$$= A \times I_n \times A^{-1}$$
$$= A \times A^{-1} = I_n.$$

ومنه مقلوب $A \times B$ هو $B^{-1} \times A^{-1}$ وهو المطلوب.

تطبيق:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

احسب A^{-1} ، B^{-1} ، $(A \times B)^{-1}$ و A^{-3}

2) لتكن المصفوفة المربعة A التالية $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

أ) تأكد أن $A^2 - A = 2I_3$ واستنتج A^{-1}

ب) عين من جديد A^{-1} مستخدما القانون.

الحل : 1) من أجل مصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ فإن مقلوبها هو

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ (انظر ص ١٠)

ومنه $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2) أ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = A \times A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

استنتاج A^{-1} : لدينا ، $A^2 - A = 2I_3$.

$$\Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3$$

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\right)(A)(A - I_3) = I_3.$$

$$\Rightarrow A.\left[\tfrac{1}{2}(A - I_3)\right] = I_3$$

نستنتج من التعريف ص 8 أن $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

الفصل الخامس:

الدوال المتعددة المتغيرات

Les fonctions à plusieurs variables

تمهيد

في الميدان التطبيقي، نجد أن الدوال بمتغير واحد نادرة في حين الدوال المتعددة المتغيرات هي الشائعة.

مثلا:

- مساحة مستطيل طوله x وعرضه y هي دالة لمتغيرين x و y.
- حجم متوازي مستطيلات أبعاده x و y و z هي دالة لثلاث متغيرات.
- الحرارة و الكثافة في كل نقطة من غرفة بثلاث أبعاد هي دوال بثلاث متغيرات.

1-5 تعريف الدالة المتعددة المتغيرات

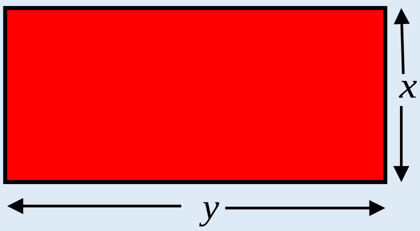
نسمي **دالة حقيقية متعددة المتغيرات** Fonction réelle de plusieurs variables أو بـ n متغيرات حقيقية، كل دالة f معرفة من IR^n نحو IR. أي أنها ترفق بكل عنصر من IR^n قيمة حقيقية على الأكثر:

$$\begin{aligned} f &: IR^n \to IR \\ &(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

مثال1

$$\begin{aligned} f &: IR^2 \to IR \\ &(x, y) \to 2(x+y) \end{aligned}$$

هي دالة حقيقية لمتغيرين حقيقيين و هي تمثل محيط مستطيل عرضه x وطوله y.



مثال2

$$\begin{aligned} f &: IR^3 \to IR \\ &(P, V, T) \to PV - nRT \end{aligned}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

هي دالة حقيقية لثلاث متغيرات حقيقية و هي تمثل قانون الغاز المثالي، حيث تمثل n كمية المادة و R ثابت الغازات المثلية و V الحجم و P الضغط و T درجة الحرارة.

1-1-5 مجموعة التعريف

نسمي **مجموعة تعريف** f domaine de définition ، مجموعة النقاط $M=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ من IR^n التي تملك صورة حقيقية بواسطة الدالة المتعددة المتغيرات f . ونرمز لها بـ D_f . أي

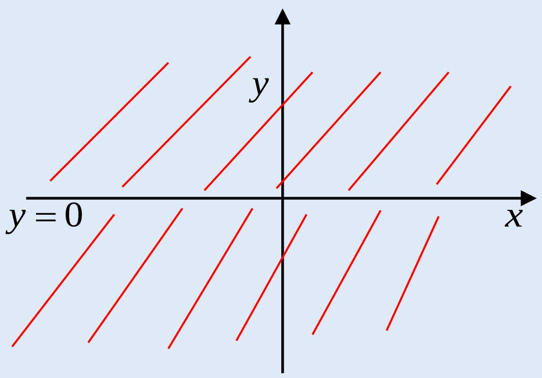
$$D_f=\{M\in IR^n / f(M)\in IR\}\subset IR^n$$

أمثلة

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / y\neq 0\}=IR\times IR^*$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي

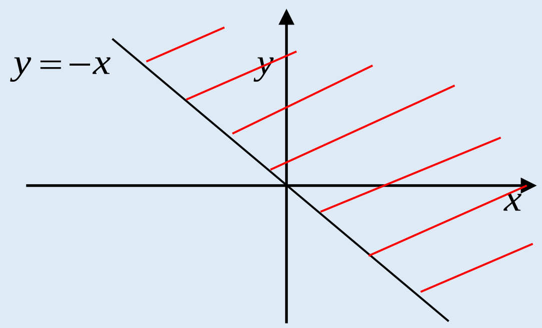


و هي تمثل كل نقاط المستوي ماعدا محور الفواصل $y=0$ (الجزء المشطب بالأحمر).

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / x+y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\geq -x\}$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي



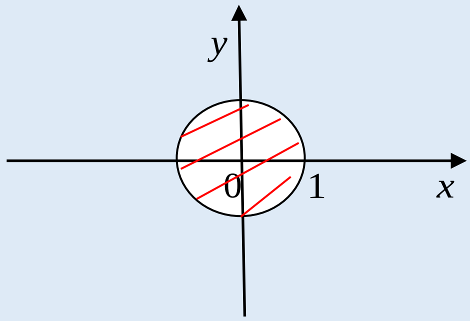
rekkabsoraya@yahoo.fr

وهي تمثل كل نقاط المستوي الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ (الجزء المشطب بالأحمر).

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ فإن

$$D_f=\left\{(x,y)\in IR^2 / 1-x^2-y^2\geq 0\right\}=\left\{(x,y)\in IR^2 / x^2+y^2\leq 1\right\}$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي



وهي تمثل كل نقاط القرص المغلق الذي مركزه المبدأ $(0,0)$ ونصف قطره يساوي 1 (الجزء المشطب بالأحمر).

تمرين

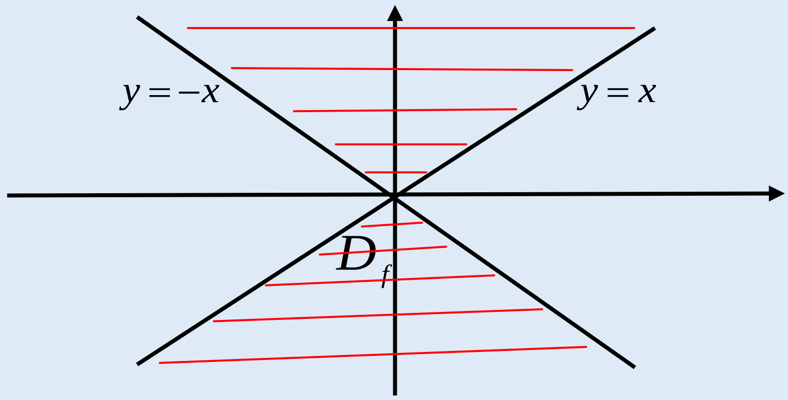
عين ثم مثل بيانيا D_f و D_g مجموعتي تعريف التابعين f و g على الترتيب و المعرفين بالشكل:

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right) \qquad \text{و} \qquad g(x,y)=\sqrt{f(x,y)}$$

الحل

$$D_f=\left\{(x,y)\in IR^2 / \frac{x+y}{y-x}>0\right\}$$

$$\frac{x+y}{y-x}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \wedge y-x>0 \\ \vee \\ x+y<0 \wedge y-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>-x \wedge y>x \\ \vee \\ y<-x \wedge y<x \end{cases}$$



rekkabsoraya@yahoo.fr

$$D_g = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, f(x,y) \geq 0\}$$

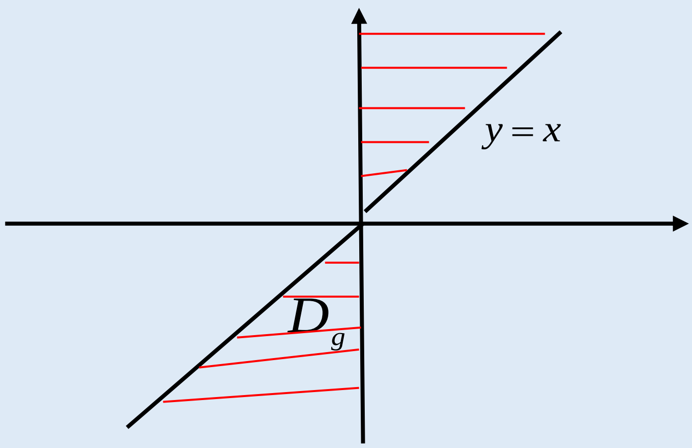
$$f(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y+x}{y-x} \geq 1$$

إذا كان $y-x>0$ أي $y>x$ فإن :

$$y+x \geq y-x \Leftrightarrow x \geq 0$$

و إذا كان $y-x<0$ أي $y<x$ فإن :

$$y+x \leq y-x \Leftrightarrow x \leq 0$$



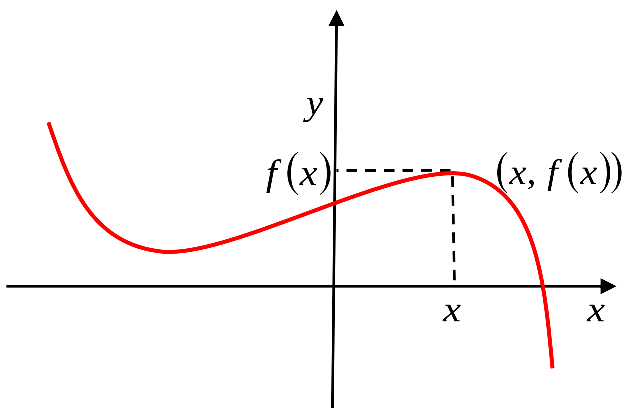
2-1-5 التمثيل الهندسي لدالة حقيقية متعددة المتغيرات

تعريف1

لتكن f دالة حقيقية بـn متغيرات حقيقية. نسمي مجموعة النقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ حيث $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تنتمي إلى D_f **بيان الدالة** f Graphe و نرمز لها بـ G_f. أي

$$G_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) / (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f\} \subset IR^{n+1}$$

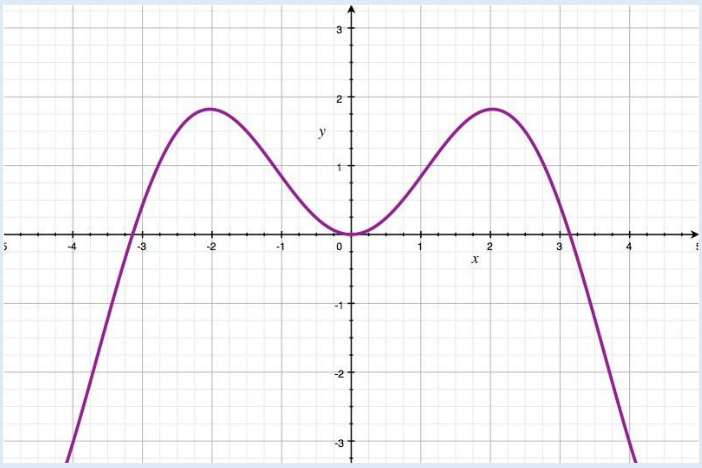
- من أجل $n=1$: نمثل بيان دالة حقيقية بمتغير حقيقي بواسطة منحنى في المستوي IR^2 أي نمثل النقاط ذات الإحداثيات $(x, f(x))$.



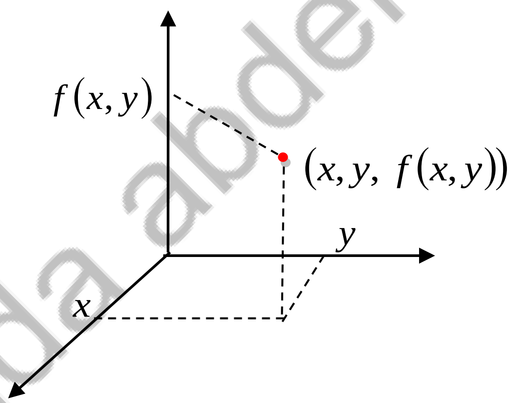
rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

بيان الدالة الحقيقية بمتغير واحد $x \mapsto x\sin x$ نمثله في المستوي IR^2 كالتالي:

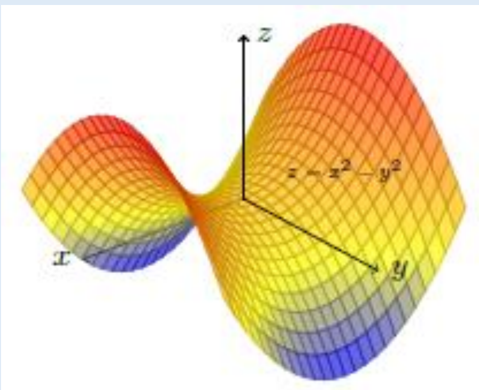


- من أجل $n=2$: نمثل بيان دالة حقيقية بمتغيرين حقيقيين بواسطة مساحة في الفضاء IR^3 أي نمثل النقاط ذات الإحداثيات $(x, y,\ f(x,y))$.



مثال1

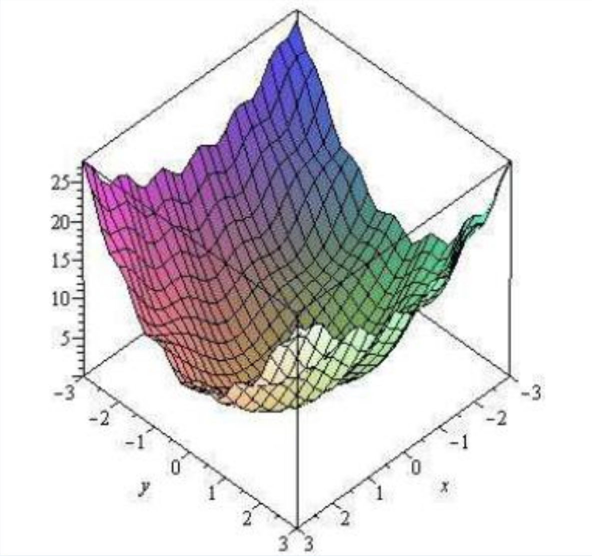
بيان الدالة الحقيقية بمتغيرين f المعرفة بـ$f(x,y)=x^2-y^2$ نمثله في الفضاء IR^3 كالتالي:



rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال2

بيان الدالة الحقيقية بمتغيرين f المعرفة بـ $f(x,y)=x^2+2y^2+\sin 2xy$ نمثله في الفضاء IR^3 كالتالي:



- من أجل $n \geq 3$: لا توجد أية طريقة واضحة لتمثيل بيان دالة حقيقية بثلاث متغيرات أو أكثر. أي من الصعب جدا الحصول على رؤية بيانية لتمثيلها هندسيا.

هناك طريقة أخرى لتمثيل دالة حقيقية بمتغيرين أو بثلاث متغيرات.

تعريف2

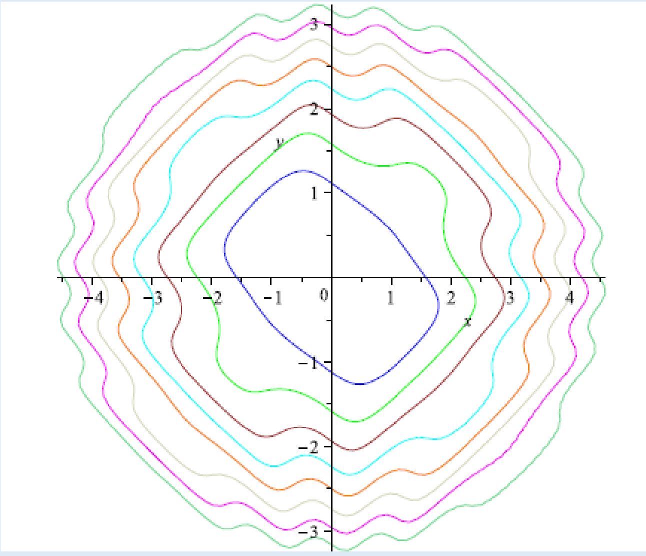
لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين. وليكن k عددا حقيقيا كيفيا. نسمي مجموعة النقاط من D_f التي صورها بواسطة الدالة f تساوي k، **بخط أو منحنى المستوى** k **للدالة** f ligne de niveau و نرمز لها بـ L_f أو C_f. أي

$$L_f=\{(x,y)\in D_f \,/\, f(x,y)=k\}\subset IR^2$$

مثال1

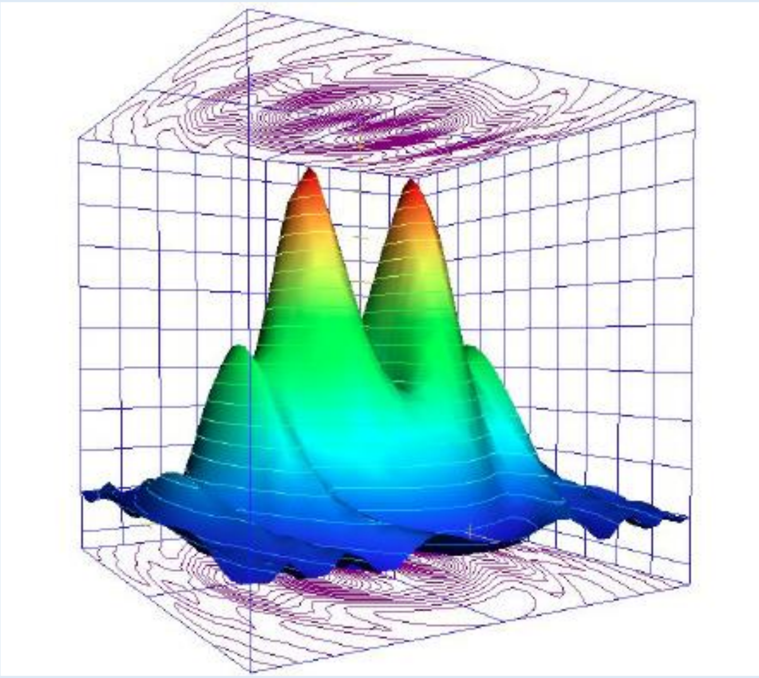
خطوط المستوى $k\in\{0,2.5,\ldots,17.5,20\}$ للدالة الحقيقية بمتغيرين f المعرفة بـ $f(x,y)=x^2+2y^2+\sin 2xy$ نمثله في الفضاء IR^2 كالتالي:

rekkabsoraya@yahoo.fr



مثال2

نمثل بيان الدالة الحقيقية f المعرفة بـ $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(x^2+3y^2\right)}{0.1+x^2+y^2}+\left(x^2+5y^2\right)\dfrac{e^{1-x^2-y^2}}{2}$ في الفضاء IR^3 مع إسقاط منحنيات المستوى على المستويين $z=0$ و $z=9$ كالتالي:



ملاحظة

تبرز منحنيات المستوى عدة حقائق فيزيائية. مثلا:

- على الخرائط الطوبوغرافية تستعمل في تحديد الارتفاع.
- على الخرائط البحرية تبرز العمق.
- على خرائط الأحوال الجوية تربط المناطق المتعادلة في الضغط الجوي...

rekkabsoraya@yahoo.fr

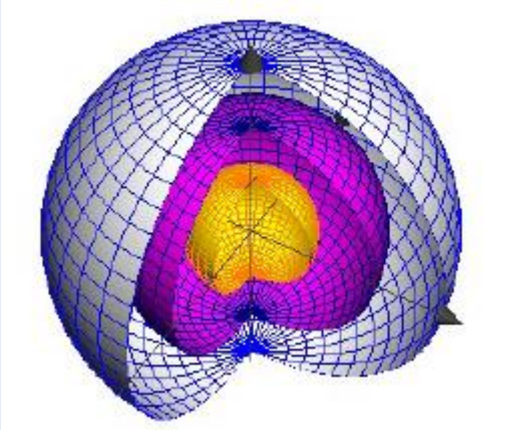
تعريف3

لتكن f دالة حقيقية بثلاث متغيرات. وليكن a عددا حقيقيا كيفيا. نسمي مجموعة النقاط من D_f التي صورها بواسطة الدالة f تساوي a، **بمساحة المستوى** a **للدالة** f و نرمز لها بـ S_a. أي

$$S_a = \{(x,y,z) \in D_f \,/\, f(x,y,z) = a\} \subset IR^3$$

مثال

مساحات المستوى $a \in \{1, 2.3\}$ للدالة الحقيقية بثلاث متغيرات f والمعرفة بـ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ نمثلها في الفضاء IR^3 (مع مقطع طولي حتى تتجلى لنا المساحات الداخلية) كالتالي:



2-5 نهاية دالة حقيقية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين ولتكن (a,b) ثنائية من IR^2. نقول أن الدالة f تقبل **نهاية** l limite لما (x,y) تؤول إلى (a,b) إذا كانت قيم $f(x,y)$ تقترب بالقدر الذي نريد من l عندما يقترب (x,y) بالقدر الكافي من (a,b) (ولا يساوي (a,b)). ونكتب

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

أي

$$\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall (x,y) \in D_f : (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon\right)$$

ملاحظة

(x,y) تؤول إلى (a,b) يعني أن x تؤول إلى a و y تؤول إلى b.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لتكن $f: IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y)=2x+y^2$ فإن $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=2$.

عمليات على النهايات

$$1)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left(f(x,y)+g(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$2)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)}\left(f(x,y).g(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$3)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \alpha\, f(x,y)=\alpha \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \quad / \alpha\in IR$$

$$4)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \quad / \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)\neq 0$$

3-5 استمرار دالة حقيقية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين ولتكن (a,b) ثنائية من D_f .

- نقول أن الدالة f **مستمرة** continue عند (a,b) إذا كان:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

- نقول أن الدالة f **مستمرة على مجموعة تعريفها** D_f إذا كانت مستمرة عند كل ثنائية (a,b) من D_f .

مثال

الدالة $f: IR^2 \to IR$ المعرفة بـ $f(x,y)=xy$ ، مستمرة عند $(0,0)$. فعلا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

ملاحظات

- نقول أن الدالة f **غير مستمرة** أو **متقطعة** discontinue عند (a,b) إذا كانت $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة أو $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\neq f(a,b)$.
- مساحة دالة غير مستمرة تحتوي حتما على ثقب أو شرخ.
- من خواص النهاية وتعريف الاستمرار، نستنتج أن: مجموع، فرق، جداء وقسمة دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة على مجموعات تعريفها.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- كل كثير حدود هو دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية وكل كسر ناطق (كسر لكثيري حدود) هو دالة مستمرة على مجموعة تعريفه.
- إذا كانت f دالة حقيقية بمتغيرين مستمرة على D_f و g دالة حقيقية بمتغير واحد معرفة ومستمرة على مجموعة صور f فإن الدالة المركبة $h = go\,f$ المعرفة بـ $h(x,y) = g\left(f(x,y)\right)$ مستمرة على D_f.
- كل النتائج السابقة يمكن تعميمها على الدوال الحقيقية المتعددة المتغيرات.

4-5 المشتقات الجزئية

لتكن f دالة حقيقية بـn متغيرات حقيقية وليكن $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ عنصرا من D_f.

من أجل $i = 1, \ldots, n$، نسمي **مشتقة جزئية** لـ f dérivée partielle بالنسبة لـ x_i عند $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ النهاية:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

إن وجدت. عندئذ نرمز لها بـ $f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ أو $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$

1-4-5 المشتقات الجزئية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين ولتكن (a,b) ثنائية من D_f.

- نسمي **مشتقة الجزئية** لـ f بالنسبة لـ x عند (a,b) النهاية:

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

إذا كانت موجودة.

- نسمي **مشتقة الجزئية** لـ f بالنسبة لـ y عند (a,b) النهاية:

$$f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

إذا كانت موجودة.

2-4-5 كيفية حساب مشتقة جزئية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين.

- لحساب $f'_x(x,y)$ ، نعتبر y ثابت ونشتق اشتقاق عادي بالنسبة لـ x.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- لحساب $f'_y(x,y)$ ، نعتبر x ثابت ونشتق اشتقاق عادي بالنسبة لـ y.

مثال1

لتكن $f: IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y)=2x^3y^2$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2y^2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4x^3y$$

مثال2

لتكن $f: IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

خواص

لتكن f و g دالتان حقيقيتان بـnـ متغيرات حقيقية و ليكن α عددا حقيقيا. فإن:

1) $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$

2) $\dfrac{\partial(f.g)}{\partial x_i}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a)+\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)f(a)$

3) $\dfrac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(a)=\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

4) $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a)=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a)-\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)f(a)}{(g(a))^2}$

مثال

لتكن $f: IR^3 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y,z)=x\cos y+z\sin y$ فإن:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\cos y$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-x\sin y+z\cos y$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\sin y$.

5-5 التفاضل

تعريف1

- لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين حقيقيين x و y . نسمي **تفاضل** f différentielle ونرمز بـ df للقيمة:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

- لتكن f دالة حقيقية بـ n متغيرات حقيقية تقبل مشتقات جزئية مستمرة. نسمي **تفاضل** f ونرمز بـ df للقيمة:

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

تعريف2

لتكن f دالة حقيقية بـ n متغيرات حقيقية تقبل مشتقات جزئية مستمرة. ولتكن $a\in D_f$. نسمي **تفاضل** f عند a التطبيق الخطي الذي نرمز له بـ df حيث:

$$df(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i$$

خواص

ليكن f و g تابعين قابلين للتفاضل عند نقطة a من IR^n. من أجل α و β من IR فإن:

1) $d(f+g)(a)=df(a)+dg(a)$

2) $d(\alpha f)(a)=\alpha df(a)$

3) $d(f.g)(a)=f(a)dg(a)+g(a)df(a)$

4) $d(f.g)(a)=f(a)dg(a)+g(a)df(a)$

ملاحظات

ليكن U جزءا من IR^n و $f:U\to IR$

- نقول أن f **قابلة للتفاضل** différentiable على U إذا كانت قابلة للتفاضل عند كل نقطة من U.
- كل دالة قابلة للتفاضل عند نقطة من U تكون مستمرة عندها.

مثال

لتكن $f:IR^2\to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y)=-18y^2-17xy+6x^2$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-17y+12x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-36y-17x$$

ومنه:

$$df=(-17y+12x)dx+(-36y-17x)dy$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

6-5 التكامل الثنائي

تعريف

لتكن الدالة $f : IR^2 \to IR$ وليكن D مجالا مغلقا ومحدودا من IR^2. نسمي ونرمز بـ $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ **للتكامل الثنائي** لـ f intégrale double على D.

خواص

للتكامل الثنائي نفس الخواص الخطية للتكامل البسيط.

ليكن f و g تابعين بمتغيرين مستمرين ومحدودين على مجال D مغلق ومحدود من IR^2. من أجل α و β من IR فإن:

$$1)\quad \iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)dx\,dy$$

$$2)\quad \forall (x,y) \in D;\ f \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)dx\,dy \geq 0$$

$$3)\quad \iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)dx\,dy \ /\ D = D_1 \cup D_2$$

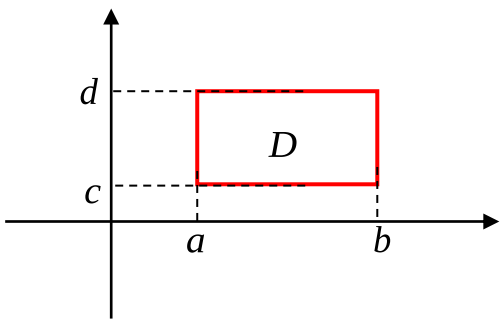
و D_2 و D_1 منفصلين.

كيفية حساب تكامل ثنائي

يتم حساب تكامل ثنائي حسب شكل مجال التكامل D:

- إذا كان D على شكل مستطيل. أي

$$D = [a,b] \times [c,d]$$



فإن:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

مثال

من أجل $D=[0,2]\times[0,1]$ و $f(x,y)=x^2+y$ فإن:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\left(\int_0^1\left(x^2+y\right)dy\right)dx=\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)_0^1 dx$$

$$=\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{8}+\frac{1}{2}x\right)_0^2=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$

أو

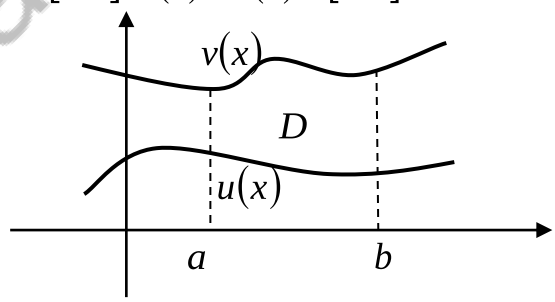
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^2\left(x^2+y\right)dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+yx\right)_0^2 dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{8}{3}+2y\right)dy=\left(\frac{8}{3}y+y^2\right)_0^1=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$

- إذا كان D على شكل بسيط عمودي على $\vec{ox}$. أي

$$D=[a,b]\times[u(x),v(x)]$$

حيث u و v تابعان مستمران على $[a,b]$ و $\forall x\in[a,b],\ u(x)<v(x)$.



فإن:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال1

أحسب التكامل الثنائي $\iint_D x^2\,dx\,dy$ حيث : $D=\{(x,y)\in IR^2 / 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{x}\}$

الحل

$$\iint_D x^2\,dx\,dy=\int_0^1 x^2\left(\int_0^{\sqrt{x}} dy\right)dx=\int_0^1 x^2[y]_0^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{7}$$

مثال2

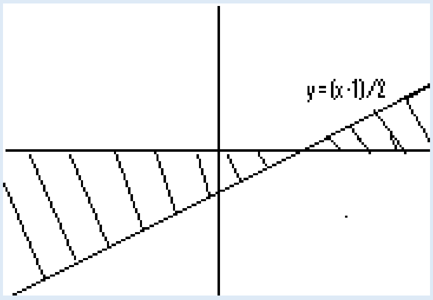
ليكن التابع المعرف على IR^2 بالشكل التالي : $f(x,y)=\sqrt{y(x-2y-1)}$

- أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f ، ثم مثلها بيانيا.
- أحسب التكامل الثنائي التالي $\iint_\Delta (2x^2-x)e^{xy}\,dx\,dy$ حيث

$$\Delta=\{(x,y)\in D_f / 1\le x\le 2\}$$

الحل

- $$D_f=\left\{(x,y)\in IR^2 / \left(y\ge 0\wedge y\le\frac{x-1}{2}\right)\vee\left(y\le 0\wedge y\ge\frac{x-1}{2}\right)\right\}$$



$$\iint_\Delta (2x^2-x)e^{xy}\,dx\,dy=\int_1^2\left((2x-1)\int_0^{\frac{x-1}{2}} xe^{xy}\,dy\right)dx=\int_1^2(2x-1)\left(e^{\frac{x^2-x}{2}}-1\right)dx$$

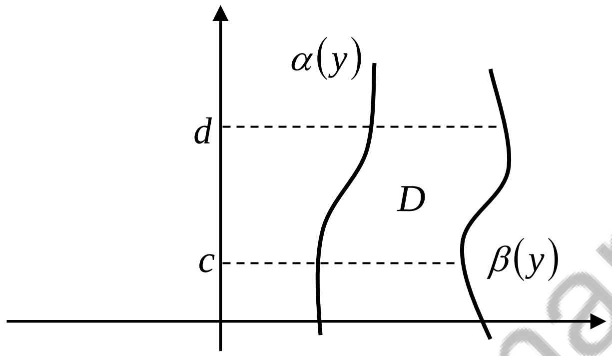
$$=2\int_1^2\left(\frac{2x-1}{2}\right)e^{\frac{x^2-x}{2}}\,dx-\int_1^2(2x-1)dx=2e-4$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

- إذا كان D على شكل بسيط عمودي على $\vec{oy}$. أي

$$D=[\alpha(y),\beta(y)]\times[c,d]$$

حيث α و β تابعان مستمران على $[c,d]$ و $\forall y\in[c,d], \alpha(y)<\beta(y)$.



فإن:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

في كل حالة من الثلاث حالات السابقة، حولنا التكامل الثنائي إلى تكاملين بسيطين متداخلين حيث تتم المكاملة من الداخل نحو الخارج وفي كل مرة بالنسبة لمتغير واحد واعتبار المتغير الثاني ثابتا.

مثال

أحسب قيمة التكامل الثنائي التالي: $J=\iint_D 2\,x\,e^{-y}\,dx\,dy$

حيث : $D=\{(x,y)\in IR^2\ /\ x\geq 0, y\leq 1\ ,\ x-y\leq 0\}$.

الحل

لدينا $0\leq y\leq 1 \wedge 0\leq x\leq y$ ومنه

$$J=2\int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^y xdx\right)dy=2\int_0^1\left(x\int_x^1 e^{-y}dy\right)dx$$

$$=-e^{-1}+2\left[-2e^{-1}+1\right]=2-5e^{-1}$$

ملاحظة

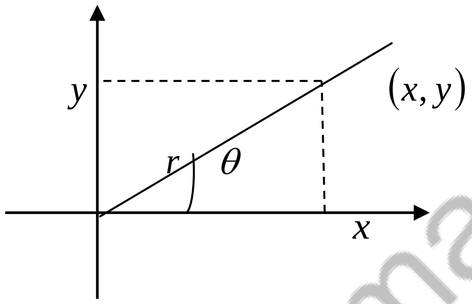
إذا أمكن تمثيل D على شكلين بسيطين (عمودي على $\vec{ox}$ أو عمودي على $\vec{oy}$) فإن قيمة التكامل لا تتغير.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تحويل المتغير

ليكن f تابعا بمتغيرين x و y. كل نقطة (x,y) من المستوي IR^2 يمكن تعيينها بواسطة الإحداثيات القطبية (r,θ) كالتالي:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



إذا كان التابع f مستمرا على مجال D مغلقا ومحدودا من IR^2 فإن:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

مثال1

ليكن التابع f حيث $f: IR^2 \to IR$ و $f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

عين D_f مجموعة تعريف التابع f ثم باستعمال تحويل متغير، أحسب مساحة الجزء D_f.

الحل

$$D_f = \{(x,y) \in IR^2 \;/\; 3 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

$$-x^2 - y^2 + 3 = 0 \;\Rightarrow\; (x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

نستعمل الإحداثيات القطبية: $x = r\cos\vartheta \;,\; y = r\sin\vartheta$

و منه D_f يتحول إلى: $D_f = \{(r,\vartheta) \in IR^2 \;/\; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \;,\; 0 \leq r \leq \sqrt{3}\}$

$$x^2 + y^2 = 3 \;\Rightarrow\; r^2 = 3$$

و منه: $\displaystyle \iint_{D_f} dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\,d\vartheta\,dr = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr = 2\pi.\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi$

rekkabsoraya@yahoo.fr

7-5 التكامل الثلاثي

لتكن الدالة $f : IR^3 \to IR$ وليكن Δ مجالا مغلقا ومحدودا من IR^3.

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[a,b] \\ y\in[u(x),v(x)] \\ z\in[\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall x\in[a,b];\, u(x)<v(x)$$
$$\forall(x,y)\in[a,b]\times[u(x),v(x)];\, \alpha(x,y)<\beta(x,y)$$

نسمي ونرمز بـ

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)}\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

للتكامل الثلاثي intégrale triple للتابع f على Δ.

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y\in[a,b] \\ x\in[u(y),v(y)] \\ z\in[\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall y\in[a,b];\, u(y)<v(y)$$
$$\forall(y,x)\in[a,b]\times[u(y),v(y)];\, \alpha(x,y)<\beta(x,y)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{u(y)}^{v(y)}\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} z\in[a,b] \\ x\in[u(z),v(z)] \\ y\in[\alpha(x,z),\beta(x,z)] \end{cases}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall z\in[a,b];u(z)<v(z)$$
$$\forall(z,x)\in[a,b]\times[u(z),v(z)];\alpha(x,z)<\beta(x,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_{u(z)}^{v(z)}\left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)dy\right)dx\right)dz$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}z\in[a,b]\\ y\in[u(z),v(z)]\\ x\in[\alpha(y,z),\beta(y,z)]\end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall z\in[a,b];u(z)<v(z)$$
$$\forall(z,y)\in[a,b]\times[u(z),v(z)];\alpha(y,z)<\beta(y,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_{u(z)}^{v(z)}\left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}y\in[a,b]\\ z\in[u(y),v(y)]\\ x\in[\alpha(y,z),\beta(y,z)]\end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall y\in[a,b];u(y)<v(y)$$
$$\forall(y,z)\in[a,b]\times[u(y),v(y)];\alpha(y,z)<\beta(y,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_{u(y)}^{v(y)}\left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[a,b] \\ z\in[u(x),v(x)] \\ y\in[\alpha(x,z),\beta(x,z)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall x\in[a,b];\, u(x)<v(x)$$
$$\forall (x,z)\in[a,b]\times[u(x),v(x)];\, \alpha(x,z)<\beta(x,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)}\left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right)dz\right)dx$$

مثال1

ليكن التابع المعرف على IR^2 بالشكل التالي

$$f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}$$

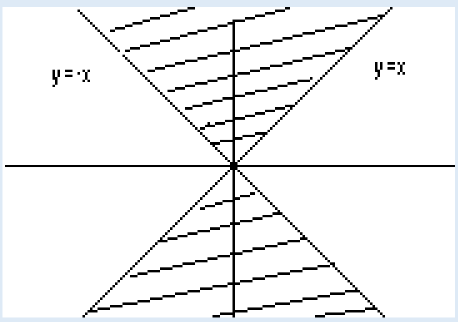
- أوجد مجموعة تعريف التابع f ، ثم مثلها بيانيا.

- أحسب التكامل الثلاثي التالي $\iiint_{\Delta}\left((f(x,y))^2+x^2\right)dx\,dy\,dz$

حيث $\Delta=\{(x,y,z)\in IR^3 / 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x \wedge 0\le z\le \sqrt{y}\}$

الحل

-
$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / y^2-x^2\ge 0\}$$
$$=\{(x,y)\in IR^2/(y-x)(y+x)\ge 0\}$$
$$=\{(x,y)\in IR^2/(y\ge x\wedge y\ge -x)\vee(y\le x\wedge y\le -x)\}$$



rekkabsoraya@yahoo.fr

- $$\iiint_{\Delta}\left(\left(f(x,y)\right)^2+x^2\right)dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{\sqrt{y}} y^2 dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^x\left(y^{\frac{5}{2}}\right)dy\right)dx=\int_0^1\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}dx=\frac{4}{63}$$

مثال2

أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_D x\ dx\,dy\,dz$ حيث :

$$D=\left\{(x,y,z)\in IR^3/0\le x\le 1,\ 0\le y\le z,\ x\le z\le 2x\right\}$$

الحل

$$\iiint_D x\ dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_x^{2x}\left(\int_0^z x\ dy\right)dz\right)dx=\int_0^1\left(\int_x^{2x} x\,z\ dz\right)dx=\int_0^1\left(x\left[\frac{1}{2}z^2\right]_x^{2x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x\left[\frac{1}{2}\left(4x^2-x^2\right)\right]\right)dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^3\ dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}\right]_0^1=\frac{3}{8}$$

مثال3

أحسب $I=\iiint_{\Delta}\frac{x}{\sqrt{y-x^2}}dx\,dy\,dz$ ، حيث:

$$\Delta=\left\{(x,y,z)\in IR^3/0\le x\le\sqrt{y}\ ,0\le y\le z^2,1\le z\le 2\right\}$$

الحل

$$I=\int_1^2\left(\int_0^{z^2}\left(\int_0^{\sqrt{y}}\frac{-x}{\sqrt{y-x^2}}dx\right)dy\right)dz=\int_1^2\left(\int_0^{z^2}\left[-\sqrt{y-x^2}\right]_0^{\sqrt{y}}dy\right)dz$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^{z^2}\sqrt{y}\ dy\right)dz=\int_1^2\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{z^2}dz=\frac{2}{3}\int_1^2 z^3dz=\frac{1}{6}\left[z^4\right]_1^2=\frac{5}{2}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

8-5 تطبيقات

عدة قيم فيزيائية تمثل على شكل تكامل ثنائي أو ثلاثي.

1-8-5 حساب المساحة

لإيجاد S_D مساحة surface الجزء D المغلق والمحدود من IR^2 يكفي حساب التكامل الثنائي :

$$S_D = \iint_D dx\,dy$$

مثال1

ليكن التابع f المعرف من IR^2 نحو IR كالتالي $f(x,y)=\sqrt{1-x-y}$

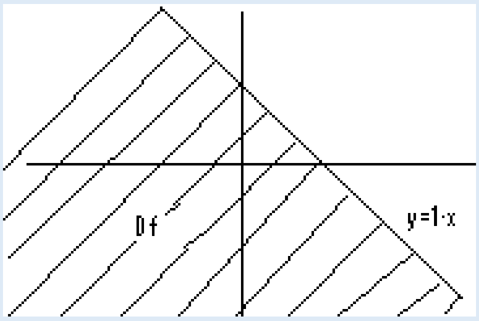
1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f ثم مثلها بيانيا.

2- أحسب مساحة الجزء Δ حيث $\Delta=\{(x,y)\in D_f \,/\, x\geq 0 \wedge y\geq 0\}$.

الحل

-1 $D_f=\{(x,y)\in IR^2 \,/\, 1-x-y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 \,/\, y\leq 1-x\}$

هي مجموعة نقاط المستوي الواقعة تحت المستقيم $y=1-x$.



2- مساحة الجزء Δ.

$$S_\Delta=\iint_\Delta dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} dy\right)dx=\int_0^1 (1-x)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)_0^1=\frac{1}{2}$$

مثال2

ليكن التابع f المعرف من IR^2 نحو IR بالشكل: $f(x,y)=\sqrt{1+x-y}$

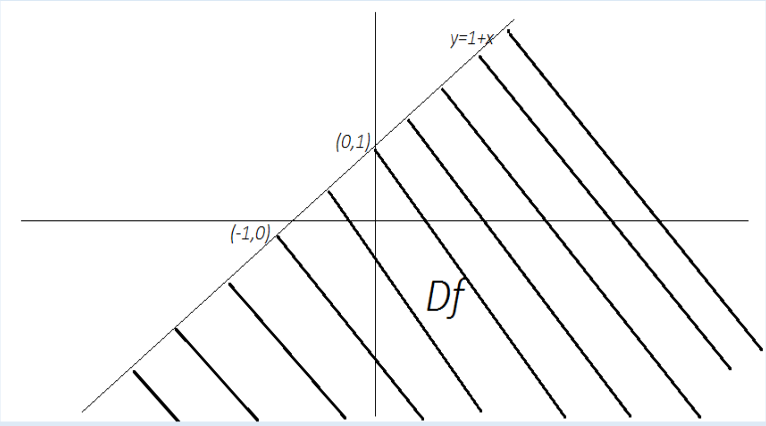
1- عين D_f. ثم مثلها بيانيا.

2- أحسب مساحة الجزء D حيث: $D=\{(x,y)\in D_f \,/\, x\leq 0 \wedge y\geq 0\}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الحل

1) $D_f=\{(x,y)\in IR^2 / 1+x-y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\leq 1+x\}$.



2) $D=\{(x,y)\in D_f / -1\leq x\leq 0 \wedge 0\leq y\leq 1+x\}$.

$$S_D=\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1+x}dy\right)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

مثال3

ليكن التابع f المعرف من IR^2 نحو IR كالتالي $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

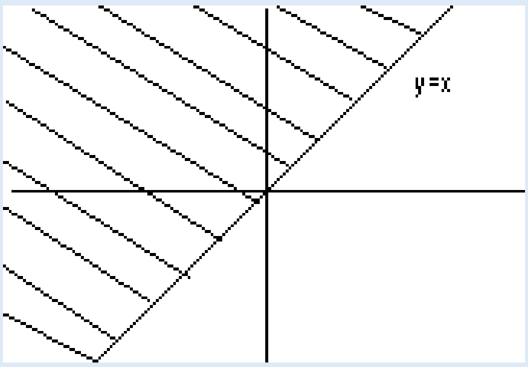
1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f ثم مثلها بيانيا.

2- أحسب مساحة الجزء Δ حيث $\Delta=\{(x,y)\in D_f / x\geq 0 \wedge y\leq 1\}$.

الحل

-1 $D_f=\{(x,y)\in IR^2 / y-x\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\geq x\}$

هي مجموعة نقاط المستوي الواقعة فوق المستقيم $y=x$.



rekkabsoraya@yahoo.fr

2- مساحة الجزء Δ.

$$S_\Delta = \iint_\Delta dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 dy \right) dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

مثال4

ليكن التابع $f : IR^2 \to IR$ حيث $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

1- عين D_f مجموعة تعريف f. ماذا تمثل بيانيا؟

2- باستعمال تحويل المتغير، أحسب مساحة D_f.

الحل

1) تعيين D_f مجموعة تعريف f .

$$D_f = \{(x,y) \in IR^2 / 1-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in IR^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$$

و هي تمثل بيانا القرص المغلق الذي مركزه $(0,0)$ و نصف قطره 1.

2) باستعمال تحويل المتغير من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات القطبية

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

فإن:

$$S_{D_f} = \iint_{D_f} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\,dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi$$

5-8-2 حساب الحجم

لإيجاد V_Δ **حجم** volume الجزء Δ المغلق والمحدود من IR^3 يكفي حساب التكامل الثلاثي :

$$\boxed{V_\Delta = \iiint_\Delta dx\,dy\,dz}$$

مثال

أحسب V_Δ، حيث: $\Delta = \{(x,y,z) \in IR^3 / z \leq x \leq 2z\,, 0 \leq y \leq 3-x,\ 2 \leq z \leq 9\}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الحل

$$V_{\Delta} = \int_{2}^{9} \left(\int_{z}^{2z} \left(\int_{0}^{3-x} dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_{2}^{9} \left(\int_{z}^{2z} [y]_{0}^{3-x} dx \right) dz = \int_{2}^{9} \left(\int_{z}^{2z} (3-x) dx \right) dz = \int_{2}^{9} \left(3x - \frac{x^2}{2} \right)_{z}^{2z} dz$$

$$= \int_{2}^{9} \left(3z - \frac{3z^2}{2} \right) dz = \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{z^3}{2} \right)_{2}^{9} = -300$$

rekkabsoraya@yahoo.fr